Άσκηση 6 ii

$$2x \cdot z_x + 3y z_y = \log x \quad \Big| \quad x>0 \text{ και } y>0$$

ΛΥΣΗ

Μετασχηματισμός

$\xi = \log x$
$\eta = \log y$

$$z_x = z_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + z_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{x} z_\xi \Rightarrow x z_x = z_\xi$$

$$z_y = z_\xi \frac{\partial \xi}{\partial y} + z_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{y} z_\eta \Rightarrow y z_y = z_\eta$$

$$2 z_\xi + 3 z_\eta = \xi \quad , \ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 d\eta - 3 d\xi = 0 \Rightarrow 2\eta - 3\xi = w(\xi, \eta)$$

$u = \xi$
$w = 2\eta - 3\xi$ $\Rightarrow 2 z_u = u$

τελικά

$$z(u, w) = f(w) + \frac{u^2}{4} \rightarrow z(\xi, \eta) = f(3\xi - 2\eta) + \frac{\xi^2}{4} \rightarrow$$

Άρα $\rightarrow$ $z(x,y) = f(3\log x - 2\log y) + \dfrac{\log^2 x}{4}$.

Άσκηση 7

$$z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

z ασυνεχής στο $(0,0)$

$x z_x + y z_y = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει νδο υπάρχει η μερική παραγ. στο $(0,0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{z(0+h,0) - z(0,0)}{h} = 0$$

Άρα ικανοποιείται η εξίσωση

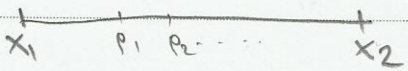
Άλυτες Ασκήσεις

B-25 : $y''+ay=0$, $a:(x_1,x_2)\to\mathbb{R}$ συνεχής

Οι ρίζες μιας μη μηδενικής λύσης είναι μεμονωμένες

ΛΥΣΗ

Ας είναι y λύση της (Ε) η οποία έχει ακολουθία ριζών $\rho_\nu\in(x_1,x_2)$ με $\rho_\nu\to\rho\in(x_1,x_2)$



$y(\rho_1)=y(\rho_2)=\dots=y(\rho_\nu)=0$

$\rho_\nu\to 0$
y συνεχής στο ρ $\Big|\rightarrow \lim\limits_{\nu\to\infty} y(\rho_\nu)=y(\rho)=0$

από Θ.Rolle στο $[\rho_\nu,\rho_{\nu+1}]$ αφού $y(\rho_\nu)=y(\rho_{\nu+1})=0$

τότε θα $\exists\, \xi_\nu\in(\rho_\nu,\rho_{\nu+1}) : y'(\rho_\nu)=0$

$\rho_\nu\le\xi_\nu\le\rho_{\nu+1} \leadsto \xi_\nu\to\rho$ y' συνεχής στο ρ

τότε $\lim\limits_{\xi_\nu\to\rho} y'(\xi_\nu)=y'(\lim\xi_\nu)=y'(0)=0$

Δηλ. $y'(\rho)=0$ και $y(\rho)=0 \leadsto y=0$ Άτοπο

άρα η y μη μηδενική